Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fís. Nat., Buenos Aires, tomo 45, 1993

EL DESARROLLO DEL CALCULO FRACCIONAL

por Shyam L. Kalla

Centro de Investigación de Matemática Aplicada - Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Maracaibo - Venezuela

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a esta Academia por la honrosa distinción que me ha conferido, al Ing. Roque Scarfiello por su generosa presentación, y a todos ustedes por háberse molestado en venir hasta aquí, brindándome el apoyo de vuestra estima y amistad.

Ante todo, permítanme contar una de las razones de mi presencia hoy aquí con los distinguidos Científicos-Académicos. La Universidad Nacional de Tucumán (UNT), hace tiempo tenía la tradición de invitar como Profesor-Visitante a científicos de diferentes países. Precisamente en el Instituto de Matemática de la UNT, estuvieron profesores de Alemania, Japón, etc. El Dr. Félix E. Herrera, académico de esa Academia en Tucumán es un gran admirador del matemático hindú S. Ramanujan y, junto con otros miembros del Instituto, pensaron invitar a un matemático hindú. Felizmente, durante finales de la década de los años sesenta, tuve contacto con el Dr. Herrera mediante mis publicaciones en el área de Análisis y así llegué a Tucumán, Argentina como Profesor por dos años, el día 25 de Febrero de 1970.

Al Dr. Herrera quiero expresar mi profundo agradecimiento, primero por invitarme a visitar su gran país, Argentina, y segundo porque hizo todo lo posible para que mi estadía fuera agradable.

Por la excelente experiencia en el campo académico y la maravillosa gente del Jardín de la República, nos quedamos en Tucumán más de seis años. Fue una experiencia muy excitante y fructífera. Durante estos años, en el Instituto de Matemática formamos un grupo numeroso de investigadores de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología y de las Facultades de Química, Bio-Química y Farmacia. Tuve el placer de trabajar con varios investigadores de Tucumán, y en particular, quiero mencionar al Dr. Augusto Battig, Dr. Raúl Luccioni, Dr. M. Valentinuzzi, entre otros. Organizamos Seminarios, Talleres, y se publicaron varios trabajos de investigación en las revistas especializadas nacionales y extranjeras. Todavía mantenemos el contacto académico con los investigadores de Tucumán.

Con mi nombramiento en 1984 como Académico-Correspondiente Extranjero, ampliamos el campo, ahora no solamente con S.M. de Tucumán, sino también con Buenos Aires. Desde entonces la correspondencia entre Maracaibo y la Academia, en particular con el Ingeniero Scarfiello, sigue su ritmo normal. Durante mi visita a la Academia Nacional de Ciencias, Sofía, Bulgaria, Universidad de Kuwait, Universidad de Nihon, Japón, Universidad de Innsbruck, Austria, en los últimos años, iniciamos los vínculos (o estrechamos los ya existentes) entre nuestra Academia y estas instituciones con el intercambio de revistas e información académica.

Mi conferencia de hoy se titula *El desarrollo del cálculo fraccional*. Tal vez es una coincidencia que mi primer trabajo fue publicado en el año 1966 con el título *Algunos teoremas sobre el cálculo fraccional*, Proc. Nat. Acad. Sci., India 36A, 1007-1012, y recientemente hemos finalizado el trabajo

Conferencia pronunciada durante su incorporación como Académico Correspondiente en Maracaibo, Venezuela, el día 7 de abril de 1992.

Aplicaciones del cálculo fraccional para sumar series infinitas, (Journal of Fractional Calculus, Vol. 1, Tokyo, Japón, 1992 p. 21-25). Me parece apropiado presentar esta conferencia de manera descriptiva. Se trata de un tema que ha estado presente en nuestra tarea de investigación durante los últimos años. Los detalles y las fórmulas matemáticas correspondientes se encuentran en la bibliografía citada y en nuestra publicaciones, las que pongo a disposición de nuestra Academia. (Trabajos publicados desde 1966 hasta 1991, en forma de Tres Tomos).

1. DESARROLLO HISTORICO Y DEFINICIONES FUNDAMENTALES

El cálculo fraccional trata de derivadas e integrales de orden arbitrario. Es decir, extender el significado del $d^n y/dx^n$, para n un número arbitrario, fraccional, irracional o complejo. La historia del cálculo fraccional comienza con Leibnitz e incluye nombres tales como Fourier, Abel, Liouville, De Morgan, Riemann, Laurent, Hardy, Erdelyi, Sneddon y varios otros.

Una vez L'Hospital preguntó a Leibnitz, qué pasa si n = 1/2 en $d^n y/dx^n$? Leibnitz[1] contesta en 1695: "Eso conduciría a una paradoja—, pero de esta aparente paradoja, un día saldrán conclusiones útiles". En 1819, S.F. Lacroix [2] le dedica al cálculo fraccional menos de dos páginas, en su libro sobre el cálculo diferencial e integral de 700 páginas. Euler y Fourier mencionan en sus trabajos la derivada de orden arbitrario, pero no dan ningún ejemplo o aplicaciones. N. H. Abel [3] fue el primero en aplicar el cálculo fraccional en el año 1823, para resolver una ecuación integral, la cual aparece en la formulación del problema del Tautochrone (Determinación de la forma de un cable sin fricción en un plano vertical tal que el tiempo de caída de un anillo es el mismo sin importar su ubicación inicial).

La solución de Abel fue tan elegante que quizás motivó a Liouville [4] para intentar dar una definición lógica de la derivada fraccional. Riemann[5], en 1847, siendo un estudiante, escribió un trabajo en el cual aparece una definición del operador fraccional.

Ahora bien, consideremos el problema matemático de definir derivadas e integrales fraccionales: Sea f(z) una función que pertenece a una clase amplia de funciones, y para cada número υ, (fraccional o complejo), se asigna ${}_cD_z^{\upsilon} f(z) = g(z)$ sujeto a los siguientes criterios:

1. Si f (z) es una función analítica en z, la derivada ${}_cD_z^{\upsilon} f(z)$ es una función analítica en υ y z.
2. El operador ${}_cD_x^{\upsilon} f(x)$ debe producir el mismo resultado como la derivada ordinaria, cuando υ es un entero positivo.
   Para $\upsilon = -n$, ${}_cD_x^{-n} f(x)$ debe coincidir con la integración n-veces.
3. ${}_0D_x^{0} f(x) = f(x)$
4. El operador debe ser lineal

$$ {}_cD_x^{-\upsilon}\,[a\,f(x) + b\,g(x)] = $$
$$ = a\,{}_cD_x^{-\upsilon} f(x) + b\,{}_cD_x^{-\upsilon} f(x) $$

5. Debe satisfacer la ley de los exponentes para la integración de orden arbitrario:

$$ {}_cD_x^{-\mu}\,{}_cD_x^{-\upsilon} = {}_cD_x^{-\mu-\upsilon} f(x) $$

Una definición que satisface estos criterios, es el operador de Riemann-Liouville [6]

$$ {}_cD_x^{-\upsilon} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)dt, \quad \mathrm{Re}(\upsilon) \geq 0 \tag{1} $$

Hay otras notaciones para este operador, e.g:

$$ R_x^{\upsilon} f(x) = I_x^{\upsilon} f(x) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)\,dt, \quad R(\upsilon) \geq o $$

$$ = \frac{d^n}{d_x^{\,n}}\; R_x^{\upsilon+n} f(x), \quad R(\upsilon) < 0 \tag{2} $$

El correspondiente operador de Weyl se define como:

$$ W_x^{\upsilon} f(x) = K_x^{\upsilon} f(x) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\upsilon-1} f(t)\,dt, \quad R(\upsilon) \geq o $$

$$= \frac{d^n}{dx^n} W_x^{\upsilon+n} f(x), \quad R_e(\upsilon) < 0 \qquad (3)$$

Observemos que en (2) si $f(x) = Ax^\lambda$, donde A y λ son constantes, entonces la integral de Ax^λ de orden arbitrario υ es:

$$R_x^\upsilon [Ax^\lambda] =$$

$$= \frac{A}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} t^\lambda \, dt = \frac{A\Gamma(\lambda+1)\, x^{\upsilon+\lambda}}{\Gamma(\lambda+\upsilon+1)} \quad Re(\upsilon) \geq 0 \qquad (4)$$

Otra definición fundamental de "diferintegral" de orden υ fue dada por Grünwald[7] en la siguiente forma:

$$\frac{d^\upsilon f}{[d(x-a)]^\upsilon} = \lim_{N \to \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-\upsilon}}{\Gamma(-\upsilon)} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\upsilon)}{\Gamma(j+1)} f\left(x-j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right) \right\} \qquad (5)$$

donde υ es arbitrario. Se observa que aquí no se han usado explícitamente el concepto clásico de la integral o derivada de una función f.

Durante las décadas cuarenta y cincuenta, Kober [8], Erdélyi [9] y varios otros definieron operadores de integración fraccional modificados y establecieron sus conexiones con las transformadas de Mellin y Hankel. Además, Erdélyi y Sneddon[10, 11] aplicaron el cálculo fraccional para resolver problemas de potencial y ecuaciones integrales duales.

Durante las últimas tres décadas, el cálculo fraccional se desarrolló enormemente, no solamente en la parte analítica, sino también en las aplicaciones en diferentes ramas de ciencia y tecnología. Bertram Ross organizó la primera conferencia internacional sobre el tema en el año 1974 en la Universidad de New Haven, U.S.A. La conferencia fue financiada por la "National Science Foundation, U.S.A" con el decidido apoyo de destacados matemáticos como Erdélyi, Sneddon y Zygmund. Varios notables investigadores tales como: R. Askey, G. Gasper, T. P. Higgins, E. R. Love, T. J. Osler, M. Mikolas, dictaron conferencias sobre diferentes aspectos del cálculo fraccional y sus aplicaciones. La memoria de esta conferencia fue publicada por Springer — Verlag en 1975[12]. El resultado de esta conferencia fue excelente, y luego aparecieron muchos trabajos en diferentes revistas de diversos países.

La segunda conferencia fue realizada en Glasgow en el año 1985, y la colección de los trabajos fue editada por A. C. McBride y G. F. Roach [13]. La tercera conferencia internacional fue organizada por K. Nishimoto en Mayo de 1.989, en la ocasión del primer centenario de la Universidad de Nihon, Japón. A esta conferencia asistieron más de cuarenta investigadores de dieciseis países. La conferencia trató sobre los últimos avances del cálculo fraccional y sus aplicaciones. "Conference Proceedings" fue publicado por Nihon University en 1990[14].

2. OPERADORES DE ERDELYI-KOBER Y SUS GENERALIZACIONES

Los operadores de integración fraccional juegan un papel importante en la teoría de ecuaciones integrales asociadas con problemas de valores de contorno. Diversos autores[12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] han definido y estudiado operadores de integración fraccional a través de transformadas integrales.

Se considera operadores de Erdélyi-Kober[18] en la siguiente forma:

$$I_\beta^{\gamma,\delta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (1-\sigma)^{\delta-1} \sigma^\gamma f(x\sigma^{1/\beta})\, d\sigma \qquad (6)$$

$$K_\beta^{\tau,\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (\sigma-1)^{\alpha-1} \sigma^{-(\tau+\alpha)} f(x\sigma^{1/\beta})\, d\sigma \qquad (7)$$

$\beta, \delta, \alpha, > 0.$

Es bien conocido que para $R_e[\beta(\gamma+1)] > 1/q$, $R_e(\beta\tau) > -1/p$ los operadores (6) y (7) son lineales y acotados de Lp $(0, \infty)$ en sí mismo.

Además:

$I_\beta^{\gamma,0} = I$, $K_\beta^{\gamma,0} = I$ (I: Operador identidad)

Estos operadores fueron estudiados extensamente [18], tanto teóricamente como en aplicaciones.

Hay varias generalizaciones de estos operadores, y las más recientes son de Kalla — Kiryakova [15]., quienes consideran operadores con un caso peculiar de la función H^- de Fox[19] como núcleo, de tal manera que estos operadores pueden expresarse como composición de m-operadores de Erdélyi — Kober.

Varios autores[11, 20, 21, 22] han utilizado los operadores de integración fraccional para resolver ecuaciones integrales (simples y duales). En la forma de la solución de las ecuaciones integrales se nota la elegancia del cálculo fraccional como una herramienta simple pero poderosa para resolver muchos problemas de análisis.

3. DEFINICION DE NISHIMOTO

Nishimoto [22] define la diferintegral como sigue: Si f(z) es una función analítica que no tiene puntos ramales en el interior y sobre C [C={C_-, C_+}], C_- es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y $-\infty + i\mathrm{Im}(z)$, y C_+ es una curva integral a lo largo del corte que une dos puntos z y $\infty + i\mathrm{Im}(z)$].

$$f_\upsilon = {}_c f_\upsilon (z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{\upsilon+1}}\, d\xi, \quad (\upsilon \in R,\ \upsilon \notin Z^-) \quad (8)$$

y

$$f_{-n} = \lim_{\upsilon \to n} f(\upsilon) \qquad (n \in Z^+)$$

donde $\xi \neq z$, $-\pi \leq \arg(\xi-z) \leq \pi$ para C_- y $0 \leq \arg(\xi-z) \leq 2\pi$ para C_+, entonces $f_\upsilon (\upsilon > 0)$ es la derivada fraccional de orden υ, y f_υ $(\upsilon < 0)$ es la integral fraccional de orden $|\upsilon|$, si f_υ existe.

Usando esta definición, Nishimoto calcula el diferintegral de varias funciones elementales y transcendentes. Además, Nishimoto[23], Nishimoto y Kalla[24], Kalla — Al Saqabi[25], y otros[22] han usado el cálculo fraccional para obtener soluciones particulares de ecuaciones diferenciales.

Recientemente, Nishimoto,[22, Vol. 4], Galué, Kalla y Nishimoto[26] han usado el cálculo fraccional para obtener la suma de series infinitas.

Un concepto similar de derivada D^υ de orden complejo υ de una función f(z), que generalizan las integrales de Cauchy y Weyl ha sido desarrollado por L.M.B.C Campos[27].

Al-Bassam[28] ha demostrado la equivalencia entre las definiciones de Holmgren y M. Riesz, y se define la forma unificada como sigue: Sea $f(x) \in C^{(n)}$, $a \leq x \leq b$, $R_e\,(\alpha + n) > 0$, entonces

$${}_a I_x^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} D_x^n \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f(t)\, dt,$$

$n = 0,1,2...$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+i}}{\Gamma(\alpha+i+1)} f^{(i)}(a) +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(t)\, dt \qquad (9)$$

$n = 1,2,..$ donde D_x^n es la derivada n-sima con respecto a x,$f^{(n)} = D_x^n f$. Usando este concepto Al-Bassam y Kalla[29] resuelven ecuaciones diferenciales y estudian cierta clase de polinomios ortogonales.

4. TRANSFORMADAS INTEGRALES Y EL CALCULO FRACCIONAL

Hay una estrecha y fructífera relación entre el cálculo fraccional, la convolución y las transformadas integrales. Observando la definición del operador de Riemann — Liouville

$$I^\upsilon f(x) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon)} \int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\,(\upsilon) \geq 0 \qquad (10)$$

Se nota que es una convolución $(t^{\upsilon-1}/\Gamma(\upsilon)) * f(t)$ o de otra manera es una transformada integral. Erdélyi, Kober, Sneddon[12] han estudiado la relación entre los operadores del cálculo fraccional y las transformadas de Mellin, Hankel y Laplace. Relaciones entre los operadores R-L y las transformadas de Varma, Meijer, etc., fueron dadas por Kalla[30]. McBride y P.G. Rooney[13] también han estudiado este tema y presentaron varios trabajos.

Durante los últimos años, varios investigadores han definido y estudiado operadores generalizados en forma de transformadas integrales, e.g. Kalla y Saxena[31], Saigo[13], Lowndes[13], etc. Todos estos operadores tienen propiedades similares a las reglas fundamentales del cálculo fraccional, y eso nos motivó a definir dos operadores generales en L_p $(0, \infty)$ de la siguiente forma:

$$R\, f(x) = x^{-\eta-1} \int_0^x t^{\eta}\, \Phi(t/\eta)\, f(t)\, dt,$$

$$\mathrm{Re}(\eta) > -1 + 1/p \qquad (11)$$

$$S\, f(x) = x^{\xi} \int_x^{\infty} t^{-\xi-1}\, \Phi\, (x/t)\, f(t)\, dt,$$

$$\mathrm{Re}\,(\xi) > -1/p \qquad (12)$$

la función Φ del núcleo de ambos operadores es una función contínua y satisface ciertas propiedades, de manera que estos operadores existan para una amplia clase de funciones f(x).

I. Dimovski y V. Kiryakova[32] han publicado varios trabajos sobre el tema de convolución y el cálculo fraccional.

5. APLICACIONES

La elegancia del cálculo fraccional consiste en su poder de simplificar los procedimientos y expresar en forma simple las soluciones de problemas complicados.

Varias funciones especiales de física-matemática se pueden expresar como difer-integral de funciones simples, por ejemplo: y

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\, z^{1-c}\, \frac{d^{a-c}}{dz^{a-c}}\, [z^{a-1}\,(1-z)^{-b}]$$

de esta forma se pueden deducir muchas propiedades de esta función.

Como ya mencionamos antes, varias ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales pueden ser resueltas mediante el uso sistemático de los operadores de cálculo fraccional[22, 23, 24, 28, 29].

El cálculo fraccional también facilita las soluciones de las ecuaciones integrales (Simples, duales, etc.)[6, 11, 18].

Kalla y Ross[13], Nishimoto[22, 23], Mikolás[14], y otros han usado los operadores de cálculo fraccional para obtener relaciones funcionales y la suma de algunas series. Por ejemplo:

$$\psi\,(\lambda) - \psi\,(\lambda-\upsilon) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\upsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\upsilon+n)}{n\Gamma(\lambda+n)}\,,$$

$$\mathrm{Re}(\lambda) > \mathrm{Re}(\upsilon) \geq 0$$

Los problemas de valores iniciales y las aplicaciones del cálculo fraccional a los problemas de ingeniería han sido tratados por R. Bagley[14, 33]. Además, ha estudiado problemas de viscoelasticidad y la descripción de las ecuaciones de movimiento en amortiguadores viscoelásticos. Los operadores de cálculo fraccional han sido usados también para obtener funciones generadoras, y en el desarrollo de la teoría de funciones analíticas.

Recientemente, el cálculo fraccional ha sido aplicado con éxito en nuevos campos como rheología, biología cuantitativa, electro-química, difusión, teoría de transporte, probabilidad automática, teoría de potencial, etc.[34]. Samko, Kilbas y Marichev[34], en su reciente libro, desarrollan la teoría y aplicaciones de las derivadas e integrales de orden arbitrario desde su inicio hasta nuestros días en una forma muy didáctica, detallada y rigurosa.

AGRADECIMIENTO

Se agradece al CONDES de la Universidad del Zulia por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

1. LEIBNITZ, G. W.: Leibnitzen's Mathematische Schriften, Hildesheim, Germany: Georg Olm, (1962), p. 301-302.

2. LACROIX, S. F.: Traité du Calcul Différential et du Calcul Intégral, Mme. Vecourcier, París, (1819), p. 409-10.
3. ABEL, N. H.: Solution de quelques problémes à l'aide d'integrales définies, Oeuvres complétes, Christiania (1881), p. 16-18.
4. LIOUVILLE, J.: Memoire sur quelques quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces quéstions, Journal de l'Ecole Polytechnique, 13 (1832), p. 1-69.
5. RIEMANN, G. F. B.: Collected Works, ed. H. Weber, Dover, New York, (1953), p. 354-360.
6. ROSS, B.: The Development of the Gamma Function and A Profile of Fracional Calculus, New York University dissertation, (1974), p. 142-210.
7. OLDHAM, K. B. and SPANIER, J.: The Fractional Calculus, Academic Press, New York, (1974).
8. KOBER, H.: On fractional integrals and derivatives, Quart. J. Math., Oxford 11 (1940), p. 193.
9. ERDELYI, A.: On fractional integration and its applications to the theory of Hankel transforms, Quart. J. Math., Oxford, 11 (1940), p. 293.
10. ERDELYI, A.: Axially symmetric potentials and fractional integration, Jour. SIAM 13 (1965), p. 216.
11. ERDELYI, A. y SNEDDON, I. N.: Fractional integration and dual integration equations, Canad. J. Math. 14 (1962), p. 685.
12. ROSS, B. (Ed.): Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, (1975).
13. MCBRIDE, A.C. y ROACH, G. F.: Fractional Calculus, Pitman-London (1985).
14. NISHIMOTO, K: Fractional Calculus and Its Applications, Coll. Engg., Nihon University, Japan, (1990).
15. KALLA, S. L. y KIRYAKOVA: An H-function generalized fractional calculus based upon compositions of Erdelyi-Kober operators in L_p, Math. Japon. 35 (1990), 1151-1171.
16. KALLA, S. L. y GALUE, L.: Generalized fractional calculus based upon composition of some basic operators; In "Recent Developments in Fractional Calculus" St. Cloud Univ., U.S.A. (1992).
17. KALLA, S.L.; GALUE, L. y SRIVASTAVA, H. M.: Further results on an H-function generalized fractional calculus, 1992.
18. SNEDDON, I. N.: Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory, North - Holland (1966).
19. SRIVASTAVA, H. M., GUPTA, K. C. y GOYAL, S. P.: The H-functions of one and two Variables with Applications, South Asia Publishers, Delhi (1982).
20. KIRYAKOVA, V.: An application of the generalized operators of fractional integration to dual integral equations involving Meijer's G-function, Pliska, Studia,. Math. Bulg.10 (1989), p. 93-107.
21. GALUE, L., KIRYAKOVA, V. and KALLA, S.: Solutions of dual integral equations by fractional calculus, (1992).
22. NISHIMOTO, K.: Fractional Calculus, Descartes Press, Koriyama, Japan, Vol. I (1984), Vol. II (1987), Vol. III (1989), Vol. IV (1991).
23. NISHIMOTO, K.: Fractional Calculus (Calculus in 21st. Century), Descartes Press, Koriyama, Japan, (1991).
24. NISHIMOTO, K. and KALLA, S.: Use of fractional calculus to solve certain linear differential equations, Jour. Coll. Engg., Nihon Univ. B-30 (1989), p. 23-28.
25. KALLA, S. L. and AL-SAQABI, B: Solution of second and third order differential equations by fractional calculus, Tamkang Jour. Math. 21 (1990). p. 191-200.
26. GALUE, L., KALLA S. L. y NISHIMOTO, K.: Application of fractional calculus to infinite sums, Jour. Fract. Cal. 1 (1992). p 21-25.
27. CAMPOS, L.M.B.C.: On a concept of derivative of complex order with applications to special functions, IMA Jour. Appl. Math. 33 (1984), p. 109-113.
28. AL-BASSAM, M.A.: On generalized power series and generalized operational calculus and its applications, in "Non-linear Analysis", World Sci., Singapore (1987).
29. AL-BASSAM, M. A. and KALLA, S. L.: on orthogonal polynomials associated with differential equations of Laguerre-type, Serdica 15 (1989), p. 217-222.
30. KALLA, S.L.: Some theorems of fractional integration, Proc. Nat. Acad. Sci., India 36A (1966), 1007-1012.
31. KALLA, S.L.: Operators of fractional integration In "Analytic Functions-Kozubnik", Springer-Verlag # 798 (1979) p. 258-280.
32. KIRYAKOVA, V.S.: Generalized Fractional Calculus and Its Applications, South Asia Publishers Ltd., New Delhi (1992).
33. BAGLEY, R. L.: The Initial Value Problem for Fractional Order Differential Equations with Constant Coefficients, Air Force Institute of Technology, AFIT-TR-88-1, (1989).
34. SAMKO, S.; KILBAS, A. y MARICHEV, O.: Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications, (en Ruso), Nauka i Tecnika, Minsk (1987).